

**Basisprüfung Lineare Algebra****Wichtige Hinweise**

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen (von Hand oder mit dem Computer geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

— • —

1. Gegeben seien die vier Vektoren in  $\mathbb{R}^3$ :

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v^{(3)} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 2(a+1) \end{pmatrix}, v^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche Werte des Parameters  $a$  sind diese Vektoren erzeugend?

b) Für  $a = 0$  soll der Vektor

$$w = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination von  $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}$  dargestellt werden. Finden Sie alle reellen Zahlen  $t_1, t_2, t_3, t_4$  so, dass

$$w = t_1 v^{(1)} + t_2 v^{(2)} + t_3 v^{(3)} + t_4 v^{(4)}.$$

2. a) Von den zwei unbekannten Grössen  $y_1$  und  $y_2$  konnten die folgenden gewichteten Mittelwerte gemessen werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(2y_1 + y_2) &= 4, \\ \frac{1}{6}(2y_1 + 4y_2) &= 2.5, \\ \frac{1}{2}(y_1 + y_2) &= 4, \\ \frac{1}{3}(y_1 + 2y_2) &= 3. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die ausgeglichenen Werte für  $y_1$  und  $y_2$  durch Lösen der Normalgleichungen.

b) (Unabhängig von a)!) Seien  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$  und  $c \in \mathbb{R}^5$  in MATLAB schon als `A` und `c` gegeben. Geben Sie die MATLAB-Statements, um die Lösung  $z$  der Fehlergleichungen  $Az - c = r$  mit der QR-Zerlegung zu erhalten.

**Bitte wenden!**

3. Wir betrachten die Ebene  $E$  in  $\mathbb{R}^3$ , gegeben durch  $x_2 = 0$ , und die lineare Abbildung  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , die jedes  $x \in \mathbb{R}^3$  orthogonal auf  $E$  projiziert.

- a) Durch welche Matrix  $A$  wird  $\mathcal{F}$  bezüglich der Standardbasis beschrieben?
- b) Bestimmen Sie Kern  $A$  und  $\dim(\text{Kern } A)$ .
- c) Bestimmen Sie Bild  $A$  und  $\dim(\text{Bild } A)$ .

4. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume von  $A$ .
- b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix  $T$  und eine Diagonalmatrix  $D$ , so dass  $T^\top A T = D$  ist.

5. Gegeben sei das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(t) &= -4y_1(t) + y_2(t) \\ \ddot{y}_2(t) &= y_1(t) - 4y_2(t) \end{aligned} \quad (1)$$

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1).
- b) Bestimmen Sie die Lösung von (1) zu den Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \dot{y}(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

6. a) Gegeben sei

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die reelle Normalform  $\tilde{D}$  von  $C$  und deren Transformationsmatrix  $\tilde{T}$ .

- b) Geben Sie die nötigen MATLAB-Statements, um die folgenden Matrizen zu definieren:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Viel Erfolg!**