

Lineare Algebra I/II für D-MAVT

| | |
|------------|--|
| Name | |
| Vorname | |
| Leginummer | |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Punkte | Note |
|---|---|---|---|---|--------|------|
| | | | | | | |
| | | | | | | |

Schauen Sie das Prüfungsblatt (im Kuvert) erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt! Und gehen Sie vor Prüfungsbeginn folgende Punkte in Ruhe durch:

- Tragen Sie Name, Vorname und Leginummer oben ein.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Die Prüfung dauert zwei Stunden. Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergänzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe und verwenden Sie kein Tipp-Ex. Legen Sie sich am besten nur erlaubtes Schreibzeug zurecht.

Beachten Sie während der Prüfung:

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen (ausser bei der Multiple-Choice-Aufgabe). Nicht begründete Lösungen ergeben keine Punkte!
- Pro Aufgabe ist höchstens eine gültige Version eines Lösungsversuchs zulässig. Streichen Sie ungültige Lösungsversuche klar durch!
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle fünf Aufgaben lösen. Tun Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

AbgabeprozEDURE:

- Sobald die Prüfungszeit abgelaufen ist oder wenn Sie vorzeitig abgeben möchten, verstauen Sie bitte dieses Deckblatt, das Aufgabenblatt und alle weiteren Blätter, die Sie abgeben wollen, im Kuvert. Das Kuvert bitte nicht zukleben und auch nicht beschriften.

Viel Glück!

1. [10 Punkte] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

| | |
|------|--------|
| wahr | falsch |
| × | |

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen × erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt 1 Punkt, jedes falsch gesetzte Kreuzchen ergibt −1 Punkt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein – wir runden auf 0 auf.

| | wahr | falsch |
|--|------|--------|
| a) Im Vektorraum der reellen Polynome enthält der Unterraum $\text{span}\{1 - x, 2 - x^2\}$ den 1-dimensionalen Unterraum $\text{span}\{x^2\}$. | | |
| b) Hat die lineare Abbildung $A: V \rightarrow W$ zweidimensionales Bild, so muss V ein zweidimensionaler Vektorraum sein. | | |
| c) Seien x, y zwei (Spalten)vektoren im \mathbb{R}^n , dann hat die $n \times n$ -Matrix xy^\top höchstens den Rang 1. | | |
| d) Die Vektoren $(a, a^2, a^3)^\top$ und $(b, b^2, b^3)^\top$ sind genau dann linear abhängig, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ oder $a = b$. | | |
| e) Ist v Eigenvektor zum Eigenwert -1 und w Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Matrix A , so ist $v + w$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0 ($v + w$ liegt also im Kern von A). | | |
| f) Für die folgende Matrix A gilt $A = A^{-1}$: | | |
| $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$ | | |
| g) Hat das Differentialgleichungssystem $A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ mindestens zwei verschiedene konstante Lösungen, dann ist 0 ein Eigenwert der 2×2 -Matrix A . | | |
| h) Jeder Eigenvektor v einer Matrix P liegt im Bild, also $v \in \text{Im}(P)$. | | |
| i) Sind A, B ähnliche Matrizen, so auch A^2, B^2 . | | |
| j) Gilt $PP = P$, so kann die Matrix P nur die Eigenwerte 0 und 1 besitzen. | | |

A

Bitte wenden!

2. [10 Punkte] Es seien folgende Untervektorräume des \mathbb{R}^4 gegeben:

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$$

$$V := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$$

a) [3 Punkte] Zeigen Sie $U \subset V$ und bestimmen Sie die Dimension der beiden Räume.

b) [4 Punkte] Finden Sie eine Orthonormalbasis für U .

c) [3 Punkte] Ergänzen Sie die Basis aus **b)** zu einer Basis für V (hierbei muss die ergänzte Basis nicht zwingend eine Orthonormalbasis sein).

3. [10 Punkte] Wir betrachten für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ das Differentialgleichungssystem

$$y_1' = -y_1 + ay_2$$

$$y_2' = ay_1 - y_2 + ay_3$$

$$y_3' = ay_2 - y_3$$

a) [4 Punkte] Schreiben Sie das System in der Form $y' = Ay$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und bestimmen Sie die Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenvektoren von A .

b) [3 Punkte] Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = Ay$, $y(0) = (2, 0, 2)^\top$ für die Matrix A aus **a)**.

c) [3 Punkte] Sei nun $a = 1$. Geben Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems $y' = Ay - b$ für $b = (0, 0, 1)^\top$ an.

4. [10 Punkte] Gegeben sei die quadratische Form

$$q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x) = 6x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 \quad \text{wobei } x = (x_1, x_2)^\top.$$

a) [1 Punkt] Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A so, dass $q(x) = x^\top Ax$.

b) [6 Punkte] Ein Kegelschnitt Q ist gegeben durch

$$q(x) + a^\top x = 0, \quad \text{wobei } a^\top = (4, 8).$$

Bringen Sie den Kegelschnitt Q durch eine Hauptachsentransformation und eine Translation auf Normalform.

c) [3 Punkte] Skizzieren Sie den Kegelschnitt Q im ursprünglichen x -Koordinatensystem.

5. [10 Punkte] Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 2 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben:

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx + \int_{-1}^1 p'(x)q'(x) dx.$$

a) [6 Punkte] Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf \mathcal{B} an, um eine Orthonormalbasis zu erhalten.

b) [2 Punkte] Finden Sie die Matrix T , welche Koordinaten bezüglich \mathcal{B} auf Koordinaten bezüglich der Basis aus **a)** abbildet.

c) [2 Punkte] Projizieren Sie das Polynom x^2 orthogonal auf den Unterraum $\text{span}\{1, x\}$.