

Lineare Algebra I/II für D-MAVT

Name	
Vorname	
Leginummer	

1	2	3	4	5	Punkte	Note

Schauen Sie das Prüfungsblatt erst an, wenn der Assistent das Signal dazu gibt! und gehen Sie vor Prüfungsbeginn folgende Punkte in Ruhe durch:

- Tragen Sie Name, Vorname und Leginummer auf dieses Deckblatt ein.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Die Prüfung dauert zwei Stunden. Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen, d.h. eine selbst verfasste oder zu einem guten Teil selber ergänzte bestehende Formelsammlung. Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe und verwenden Sie keinen Tipp-Ex. Legen Sie sich am besten nur erlaubtes Schreibzeug zurecht.

Beachten Sie während der Prüfung:

- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen (ausser bei der multiplechoice Aufgabe). Nicht begründete Lösungen ergeben keine Punkte!
- Pro Aufgabe ist höchstens eine gültige Version eines Lösungsversuchs zulässig. Streichen Sie ungültige Lösungsversuche klar durch!
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle fünf Aufgaben lösen. Tun Sie einfach Ihr Bestes! Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.

Viel Glück!

1. [10 Punkte] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
×	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen \times erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, so streichen Sie es einfach irgendwie durch (bis es kein Kreuzchen mehr ist:-)

Jede Teilaufgabe a)-j) gibt einen Punkt, wenn alle Kreuzchen richtig gesetzt sind, -1 falls nicht alle Kreuzchen richtig sind und 0 falls sie unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf 0 auf.

	wahr	falsch
a) Die Polynome $\{(x+1)^2, (x-1)^2, (x+2)^2\}$ im Vektorraum P_2 der Polynome vom Grad ≤ 2 sind linear unabhängig.		
Die Polynome $\{(x+1)^2, (x-1)^2, (x+2)^2\}$ erzeugen P_2 .		
b) Die Polynome $\{x^2-1, x^2+x, x+1, x-1\}$ in P_2 sind linear unabhängig.		
Die Polynome $\{x^2-1, x^2+x, x+1, x-1\}$ erzeugen P_2 .		
c) Die Polynome $\{(x+1)^2, x^2+1, (x-1)^2\}$ in P_2 sind linear unabhängig.		
Die Polynome $\{(x+1)^2, x^2+1, (x-1)^2\}$ erzeugen P_2 .		
d) Jeder Vektor des Vektorraums \mathbb{R} bildet eine Basis für diesen eindimensionalen Raum.		
e) Ist die Matrix A halbeinfach, so auch A^3 .		
f) Der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist 3 , denn jede Dimension/Komponente im Zielraum wird "getroffen".		
g) Drei Vektoren $\{v_1, v_2, v_3\}$ sind linear unabhängig genau dann wenn sie paarweise linear unabhängig sind (also wenn die drei Pärchen $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_1\}$, linear unabhängig sind).		
h) Hat eine 3×3 -Matrix nur einen Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachheit 3 , so kann das nur die Matrix $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sein.		
i) Gilt für eine 3×3 -Matrix A und eine Basis $\{v_1, v_2, v_3\}$ von \mathbb{R}^3 , dass $Av_i \neq 0$ für $i = 1, 2, 3$, so liegt nur der Nullvektor im Kern von A .		
j) Es gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det A$ für beliebige Matrizen A und reelle Zahlen λ , denn die Determinante ist eine lineare Abbildung.		

- 2. [10 Punkte]** Sei V der von den Funktionen $\{1, x, x^2, e^x\}$ aufgespannte Vektorraum mit dem Unterraum $U := \text{span}\{1, x, x^2\}$. Für zwei Funktionen $f, g \in V$ sei das folgende Skalarprodukt definiert:

$$\langle f, g \rangle := f(0)g(0) + f'(0)g'(0) + f''(0)g''(0) + f'''(0)g'''(0).$$

- Wie lautet die Norm von $f \in V$ bezüglich des gegebenen Skalarprodukts?
- Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis in U bezüglich des gegebenen Skalarprodukts.
- Bestimmen Sie die beste Approximation der Funktion e^x in U , d.h. bestimmen Sie die Funktion $f \in U$, so dass deren Abstand (in der Norm) zu e^x minimal ist.
- Verifizieren Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tatsächlich ein Skalarprodukt ist.

- 3. [10 Punkte]** Gegeben sei die quadratische Form

$$q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto q(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 \quad \text{wobei } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A so, dass $q(x) = x^\top Ax$.
- Ein Kegelschnitt Q ist gegeben durch

$$q(x) + a^\top x = 0, \quad \text{wobei } a^\top = (12, 24).$$

Bringen Sie den Kegelschnitt Q durch eine Hauptachsentransformation und eine Translation auf Normalform.

- Zeichnen Sie den Kegelschnitt Q im ursprünglichen x -Koordinatensystem.

- 4. [10 Punkte]** Sei P_2 der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 mit der Basis $B = \{1, x, x^2\}$. Sei

$$L : P_2 \rightarrow P_2, \quad p(x) \mapsto p''(x) + 4p'(x) + 3p(x)$$

- Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von L bezüglich der Basis B .
- Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von L^{-1} bezüglich der Basis B .
- Verwandeln Sie die Differentialgleichung

$$y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = f(x) \tag{*}$$

in ein System 1. Ordnung und bestimmen Sie dessen Lösungsraum für $f(x) \equiv 0$.

- Finden Sie diejenige Lösung $y(x)$ von (*) für $f(x) = 18x \in P_2$ mit $y(0) = y'(0) = 0$.

5. [10 Punkte] Gegeben seien die folgenden Unterräume von \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} U &:= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0\} \\ V &:= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 3x_1 + 5x_3 + 2x_4 = -2x_2 \text{ und} \\ &\quad 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0\} \end{aligned}$$

- a) Berechnen Sie $\dim(U \cap V)$.
- b) Geben Sie eine Basis des Unterraums $U + V$ an.
- c) Finden Sie eine Matrix A , so dass $U + V$ der Kern von A ist.
- d) Finden Sie eine Matrix B , so dass U das Bild von B ist.
- e) Finden Sie eine singuläre Matrix C , so dass U ein Eigenraum von C zum Eigenwert 1 ist, wobei 1 geometrische und algebraische Vielfachheit 3 hat.