

D-MAVT, ETH Zürich  
**Lineare Algebra**  
**Lösung der Prüfung**  
Sommer 2010  
Prof. Ö. Imamoglu

1. a) Wir wenden den Gaußalgorithmus an:

$$B' = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 2 & \beta & 2\alpha & 1 \\ \alpha & 2\alpha & \beta^2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha & 1 \\ 0 & \beta - 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \beta^2 - \alpha^2 & 1 - \alpha \end{array} \right)$$

$(1, 1, 1)^\top \in \text{Bild } B$  gilt genau dann wenn  $\text{Rang } B = \text{Rang } B'$ :

Fall 1 ( $\text{Rang } B = 3 = \text{Rang } B'$ ):	$4 \neq \beta \neq \pm\alpha$
Fall 2 ( $\text{Rang } B = 2 = \text{Rang } B'$ ):	$4 \neq \beta = \pm\alpha, \alpha = 1$
Fall 3:	$4 \neq \beta = \pm\alpha, \alpha \neq 1$
Fall 4:	$4 = \beta$

In Fall 3 und 4 gilt jeweils  $\text{Rang } B < \text{Rang } B'$ . Also gilt  $(1, 1, 1)^\top \in \text{Bild } B$  genau in Fall 1 und 2.

b) Aus Teilaufgabe a) kann man ablesen, dass  $B$  genau dann singulär ist, wenn  $\beta = \pm\alpha$  oder  $\beta = 4$ .

c) Aus Teilaufgabe a) hat man:

$$\text{Rang } B = \begin{cases} 1, & \text{falls } \beta = 4, \alpha = \pm 4 \\ 2, & \text{falls } \beta = \pm\alpha, \beta \neq 4 \text{ oder } \beta = 4, \alpha \neq \pm\beta \\ 3, & \text{falls } 4 \neq \beta \neq \pm\alpha \end{cases}$$

d) Für  $\alpha = \beta = 4$  gilt:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Basis des Kerns ist also z.B.  $\mathcal{B} = \{(2, -1, 0)^\top, (0, -2, 1)^\top\}$

2. a)

$$[p]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$(b^{(1)}, b^{(2)}) = (1, x) = \int_{-1}^1 y^3 dy = 0$$

$$(b^{(1)}, b^{(3)}) = (1, 5x^2 - 3) = \int_{-1}^1 5y^4 - 3y^2 dy = y^5 - y^3 \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$(b^{(1)}, b^{(2)}) = (x, 5x^2 - 3) = \int_{-1}^1 5y^5 - 3y^3 dy = 0$$

c)  $(\cdot, \cdot)$  ist eine symmetrische pos. def. Bilinearform:

Symmetrisch:  $(p, q) = \int_{-1}^1 p(y)q(y)y^2 dy = \int_{-1}^1 q(y)p(y)y^2 dy = (q, p)$

Bilinear:  $(p_1 + \lambda p_2, q) = \int_{-1}^1 (p_1(y) + \lambda p_2(y))q(y)y^2 dy$   
 $= \int_{-1}^1 p_1(y)q(y)y^2 dy + \lambda \int_{-1}^1 p_2(y)q(y)y^2 dy = (p_1, q) + \lambda(p_2, q)$

Positiv definit:  $(p, p) = \int_{-1}^1 p(y)^2 y^2 dy \geq 0$  und  $(p, p) = 0$  gdw.  $p = 0$

Wobei die Linearität im zweiten Argument aus der Symmetrie folgt.

3. a) Falls man die Eigenwerte  $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 1$  nicht direkt errät, kann man das charakteristische Polynom von  $A$  bestimmen:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \text{id}) = (-3 - \lambda) ((-3 - \lambda)^2 - 4) - 2(2(-3 - \lambda) - 4) + 2(4 - 2(-3 - \lambda)) \\ &= (-3 - \lambda)(1 + \lambda)(5 + \lambda) + 8(5 + \lambda) = -(\lambda + 5)(3 + 4\lambda + \lambda^2 - 8) \\ &= -(\lambda + 5)^2(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Dies ergibt die obigen Eigenwerte als Nullstellen von  $\chi_A(\lambda)$ . Die algebraischen Vielfachheiten sind 2 für  $\lambda_1 = -5$  und 1 für  $\lambda_2 = 1$ . Die Eigenräume sind:

$$\begin{aligned} E_{-5} &= \text{Ker}(A + 5 \text{id}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ E_1 &= \text{Ker}(A - \text{id}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

Die geometrischen Vielfachheiten entsprechen den Dimensionen der entsprechenden Eigenräume.  $\lambda_1 = -5$  hat also geometrische Vielfachheit 2 und  $\lambda_2 = 1$  geom. Vielf. 1.

- b) Die Matrix  $A$  ist diagonalisierbar, da die geom. Vielf. gleich den alg. Vielf. sind. Wir können also für  $T$  die oben angegebene Eigenbasis und für  $D$  die Diagonalmatrix mit den entsprechenden Eigenwerten wählen:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt  $D = T^{-1}AT$ .

- c)  $[T, D] = \text{eig}(A)$  ;

4. a) Wir suchen eine Matrix  $T$ , so dass  $A = TDT^{-1}$ , wobei  $D$  eine Diagonalmatrix ist. Dazu wählen wir für  $D$  die Matrix mit den Eigenwerten von  $A$  in der Diagonale und für  $T$  die Matrix mit den entsprechenden Eigenvektoren als Spalten. Die Eigenwerte kann man direkt von der Matrix ablesen (man sucht ein  $\lambda$ , so dass  $A - \lambda \text{id}$  singulär wird):  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -3$ ,  $\lambda_3 = 0$ . Alternativ kann man diese auch mit dem charakteristischen Polynom von  $A$  bestimmen:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \text{id}) = \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & -3 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1 - \lambda)(-3 - \lambda)(-1 - \lambda) + (3 + \lambda) = -(\lambda + 2)(\lambda + 3)\lambda \end{aligned}$$

Dies ergibt die obigen Eigenwerte als Nullstellen von  $\chi_A(\lambda)$ . Die Eigenräume sind:

$$E_{-2} = \text{Ker}(A + 2 \text{id}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_{-3} = \text{Ker}(A + 3 \text{id}) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{span} \left\langle v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_0 = \text{Ker}(A) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\langle v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Wir haben also:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Führt man die Substitution  $y = Tx$  durch, so erhält man das entkoppelte Differentialgleichungssystem  $\dot{x} = Dx$ . Dieses besitzt folgende allgemeine Lösung:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 e^{-2t} \\ x_2 e^{-3t} \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Wobei  $x_1, x_2, x_3$  noch unbestimmte Konstanten sind. Daraus ergibt sich folgende allgemeine Lösung des ursprünglichen Differentialgleichungssystem:

$$y(t) = Tx(t) = \begin{pmatrix} x_1 e^{-2t} + x_3 \\ x_2 e^{-3t} \\ -x_1 e^{-2t} + x_3 \end{pmatrix}$$

**b)** Es gilt:

$$y(0) = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 \\ -x_1 + x_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Also  $x_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_2 = -1$  und  $x_3 = \frac{3}{2}$ . Dies ergibt folgende spezielle Lösung:

$$y(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-2t} + 3 \\ -e^{-3t} \\ e^{-2t} + 3 \end{pmatrix}$$

**c)** Es muss folgendes gelten:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn  $x_3 = 0$ , das heisst genau dann, wenn  $y(0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$  für  $x_1, x_2$  beliebig.

**d)**  $B = \begin{bmatrix} -1 & 3^{7/2} & 0 & 4 \end{bmatrix}$  ;

**5. a) Ja:** Für  $U_1, U_2 \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt  $U_1 + \lambda U_2 \in V$ :

$$(U_1 + \lambda U_2)^\top = U_1^\top + \lambda U_2^\top = -U_1 - \lambda U_2^\top = -(U_1 + \lambda U_2)$$

$U$  ist ein eindimensionaler Untervektorraum mit folgender Basis:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

**b) Nein:** Sei  $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  und  $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Dann gilt  $\det M_1 = \det M_2 = 0$ , also

$M_1, M_2 \in W$ . Aber  $\det(M_1 + M_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ , also  $M_1 + M_2 \notin W$ . Dies müsste aber in einem Untervektorraum gelten. Also ist  $W$  kein Untervektorraum.

**c) Ja:** Sei  $A, B \in Y$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann gilt:

$$(A + \lambda B) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Für  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Y$  gilt  $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ , also  $b = -a$  und  $d = -c$ . Entsprechend haben

alle Matrizen in  $Y$  folgende Gestalt:  $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ c & -c \end{pmatrix}$ . Es handelt sich bei  $Y$  also um einen zweidimensionalen Untervektorraum mit folgender Basis:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$