

Lösungen zu Prüfung

Lineare Algebra I/II für D-MAVT

1. Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
×	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen \times erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jedes richtig gesetzte Kreuzchen ergibt 1 Punkt, jedes falsch gesetzte Kreuzchen ergibt -1 Punkt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein – wir runden auf 0 auf.

WICHTIG: Die Reihenfolge der Teilaufgaben a)-j) kann von der auf Ihrem Prüfungsblatt abweichen.*

	wahr	falsch
a) Im Vektorraum der reellen Polynome enthält der Unterraum $\text{span}\{1 - x, 2 - x^2\}$ den 1-dimensionalen Unterraum $\text{span}\{x^2\}$.		×
b) Hat die lineare Abbildung $A: V \rightarrow W$ zweidimensionales Bild, so muss V ein zweidimensionaler Vektorraum sein.		×
c) Seien x, y zwei (Spalten)vektoren im \mathbb{R}^n , dann hat die $n \times n$ -Matrix xy^\top höchstens den Rang 1.	×	
d) Die Vektoren $(a, a^2, a^3)^\top$ und $(b, b^2, b^3)^\top$ sind genau dann linear abhängig, wenn $a = 0$ oder $b = 0$ oder $a = b$.	×	
e) Ist v Eigenvektor zum Eigenwert -1 und w Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Matrix A , so ist $v + w$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 0 ($v + w$ liegt also im Kern von A).		×
f) Für die folgende Matrix A gilt $A = A^{-1}$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$	×	
g) Hat das Differentialgleichungssystem $A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ mindestens zwei verschiedene konstante Lösungen, dann ist 0 ein Eigenwert der 2×2 -Matrix A .	×	
h) Jeder Eigenvektor v einer Matrix P liegt im Bild, also $v \in \text{Im}(P)$.		×
i) Sind A, B ähnliche Matrizen, so auch A^2, B^2 .	×	
j) Gilt $PP = P$, so kann die Matrix P nur die Eigenwerte 0 und 1 besitzen.	×	

* verschiedene Serien A, B, C, D

Bitte wenden!

Siehe nächstes Blatt!

2. Es seien folgende Untervektorräume des \mathbb{R}^4 gegeben:

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$$

$$V := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$$

- a) [3 Punkte] Zeigen Sie $U \subset V$ und bestimmen Sie die Dimension der beiden Räume.
- b) [4 Punkte] Finden Sie eine Orthonormalbasis für U .
- c) [3 Punkte] Ergänzen Sie die Basis aus b) zu einer Basis für V (hierbei muss die ergänzte Basis nicht zwingend eine Orthonormalbasis sein).

Lösung: a) U wird durch zwei linear unabhängige Gleichungen definiert ($x_1 = x_2$ und $x_2 = x_3$) und V durch eine. Jede solche Gleichung reduziert die Dimension um 1. Daher $\dim(U) = 2$, $\dim(V) = 3$. Oder ausführlicher; U ist offensichtlich der Kern der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat offensichtlich $\text{Rang}(A) = 2$ und damit nach der Formel $\dim(\text{Im}(A)) + \dim(\text{Kern}(A)) = 2 + \dim(U) = \dim(\mathbb{R}^4) = 4$ also $\dim(U) = 2$. Zu $U \subset V$: Ist $u \in U$, dann gilt also $u_1 = u_2 = u_3$ und somit ist $u_1 - 2u_2 + u_3$ natürlich Null, somit $u \in V$.

- b) Jedes Element aus U ist von der Form $(\alpha, \alpha, \alpha, \beta)^\top$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und wir müssen zuerst 2 linear unabhängige Vektoren daraus wählen (denn $\dim(U) = 2$). z.B. $(1, 1, 1, 0)^\top, (0, 0, 0, 1)^\top$. Diese stehen bereits senkrecht aufeinander (ansonsten muss man einen Gram-Schmidt Schritt durchführen) und müssen daher nur noch normiert werden. Die ONB (Orthonormalbasis) lautet daher

$$\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0)^\top, (0, 0, 0, 1)^\top\}$$

- c) Da die Dimension von V nur um 1 grösser ist als die von U brauchen wir nur einen weiteren Vektor aus $V \setminus U$ zu wählen; also ein Vektor der $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ erfüllt, aber dessen erste 3 Komponenten nicht alle gleich sind. Ein mögliche Wahl ist $(2, 1, 0, 0)^\top$.

3. Wir betrachten für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + ay_2 \\ y_2' &= ay_1 - y_2 + ay_3 \\ y_3' &= ay_2 - y_3 \end{aligned}$$

- a) [4 Punkte] Schreiben Sie das System in der Form $y' = Ay$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und bestimmen Sie die Eigenwerte sowie die zugehörigen Eigenvektoren von A .
- b) [3 Punkte] Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = Ay$, $y(0) = (2, 0, 2)^\top$ für die Matrix A aus a).
- c) [3 Punkte] Sei nun $a = 1$. Geben Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems $y' = Ay - b$ für $b = (0, 0, 1)^\top$ an.

Lösung: a) In Matrixform lautet das System

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ a & -1 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A lautet

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = (-1 - \lambda)^3 - 2a^2(-1 - \lambda) = (-1 - \lambda)((-1 - \lambda)^2 - 2a^2)$$

und daher sind die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}a$. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist der Kern von

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Die erste Zeile impliziert $x_2 = 0$ für $x \in E_1$ und die zweite $x_1 = -x_3$. Daher $E_{-1} = \text{span}\{(1, 0, -1)^\top\}$. Analog berechnet man $E_{-1+\sqrt{2}a} = \text{span}\{(1, \sqrt{2}, 1)^\top\}$ und $E_{-1-\sqrt{2}a} = \text{span}\{(1, -\sqrt{2}, 1)^\top\}$.

b) Nach a) ist die allgemeine Lösung des Systems

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{(-1+\sqrt{2}a)t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{(-1-\sqrt{2}a)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir $t = 0$ und die geforderten Anfangswerte ein, so müssen die Koeffizienten C_1, C_2, C_3 also

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

erfüllen. Die eindeutige Lösung ist $C_1 = 0, C_2 = C_3 = 1$.

Siehe nächstes Blatt!

- c) Siehe b) für allgemeine Lösung des homogenen Teils. Zu dieser müssen wir nur noch eine partikuläre Lösung der gegebenen inhomogenen Gleichung hinzufügen. Dazu suchen wir nach einer stationären Lösung, also einem $y(t)$ welches konstant ist. Es gilt dann $y'(t) = 0$ und wir erhalten

$$y' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Die eindeutige Lösung davon ist $(1, 1, 0)^\top$ und damit ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{(-1+\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{(-1-\sqrt{2})t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Gegeben sei die quadratische Form

$$q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x) = 6x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 \quad \text{wobei } x = (x_1, x_2)^\top.$$

a) [1 Punkt] Bestimmen Sie die symmetrische Matrix A so, dass $q(x) = x^\top Ax$.

b) [6 Punkte] Ein Kegelschnitt Q ist gegeben durch

$$q(x) + a^\top x = 0, \quad \text{wobei } a^\top = (4, 8).$$

Bringen Sie den Kegelschnitt Q durch eine Hauptachsentransformation und eine Translation auf Normalform.

c) [3 Punkte] Skizzieren Sie den Kegelschnitt Q im ursprünglichen x -Koordinatensystem.

Lösung: a) A muss eine 2×2 -Matrix sein, sonst ist $x^\top Ax$ nicht definiert, also ist A von der Gestalt $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ (die Symmetrie wird ja verlangt). Mit

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

und Koeffizientenvergleich ergibt dies $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Zuerst diagonalisieren wir die Matrix A . Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von

$$\det \begin{pmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 14,$$

also $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$. EV zum EW 2 ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, EV zum EW 7 ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix $T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine orthogonale Koordinatentransformations-Matrix vom Eigensystem (nennen wir dies das y -Koordinatensystem) in das ursprüngliche x -Koordinatensystem: $x = Ty$. Im y -Koordinatensystem lautet der Kegelschnitt somit

$$q(Ty) + a^\top Ty = (Ty)^\top A(Ty) + a^\top Ty = 2y_1^2 + 7y_2^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}y_1 = 0.$$

Wir ergänzen quadratisch um den y_1 -Term zu eliminieren und bekommen

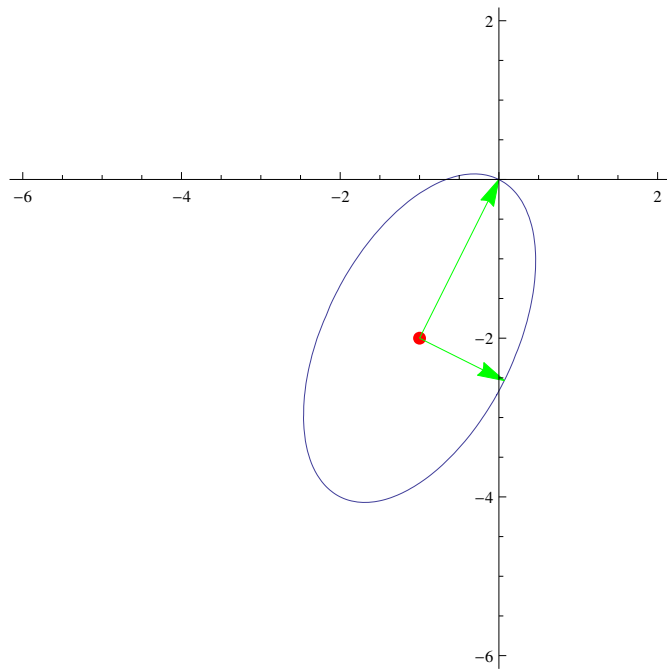
$$2(y_1 + \sqrt{5})^2 + 7y_2^2 - 10 = 0$$

was einer Translation $y + \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = z$ des y -Koordinatensystems in ein z -Koordinatensystem entspricht. Schliesslich erhalten wir eine Normalform im z -Koordinatensystem

$$\frac{z_1^2}{5} + \frac{7z_2^2}{10} = 1.$$

c) An der Normalform lässt sich ablesen, dass der Kegelschnitt eine Ellipse mit Halbachsenlängen $\sqrt{5}$ und $\sqrt{\frac{10}{7}}$ (≈ 1.19 oder, zum skizzieren, ungefähr 1) ist. Der Mittelpunkt der Ellipse ist bei $z = 0$, was in y -Koordinaten $y = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ und in x -Koordinaten $x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist. Die Richtung der grossen Halbachse ist im z - und y -Koordinatensystem $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und im x -System folglich $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die kleine Halbachse steht natürlich senkrecht dazu. Dies ergibt folgendes Bild (beachte, dass der Kegelschnitt durch den Nullpunkt geht).

Siehe nächstes Blatt!



Bitte wenden!

5. Sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 2 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Weiter sei das folgende Skalarprodukt gegeben:

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx + \int_{-1}^1 p'(x)q'(x) dx.$$

- a) [6 Punkte] Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf \mathcal{B} an, um eine Orthonormalbasis zu erhalten.
- b) [2 Punkte] Finden Sie die Matrix T , welche Koordinaten bezüglich \mathcal{B} auf Koordinaten bezüglich der Basis aus a) abbildet.
- c) [2 Punkte] Projizieren Sie das Polynom x^2 orthogonal auf den Unterraum $\text{span}\{1, x\}$.

Lösung: a) Das erste Polynom brauchen wir nur zu normieren.

$$\|1\| = \sqrt{\langle 1, 1 \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^1 1 \cdot dx + \int_{-1}^1 0 \cdot 0 dx} = \sqrt{2}$$

und damit erhalten wir $p_1(x) = 1/\|1\| = 1/\sqrt{2}$ als erstes Polynom für unsere ONB (Orthonormalbasis). Nach dem Gram-Schmidtsschen Verfahren, erhalten wir (den noch nicht normierten zweiten ONB-Vektor) durch

$$\tilde{p}_2 = x - \langle x, 1/\sqrt{2} \rangle \cdot 1/\sqrt{2}.$$

Da aber

$$\int_{-1}^1 x \cdot 1/\sqrt{2} dx + \int_{-1}^1 1 \cdot 0 dx = 0 \quad (\text{der erste Integrand ist eine ungerade Funktion})$$

x also schon senkrecht auf $1/\sqrt{2}$ steht, müssen wir $\tilde{p}_2(x) = x$ nur noch normieren.

$$\|x\| = \sqrt{\int_{-1}^1 x^2 dx + \int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx} = \sqrt{\left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^1 + 2} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Und damit $p_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x$. Für den letzten ONB-Vektor rechnen wir zuerst

$$\tilde{p}_3 = x^2 - \langle x^2, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x \rangle \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x - \langle x^2, 1/\sqrt{2} \rangle \cdot 1/\sqrt{2}$$

$$\langle x^2, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x \rangle = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x^3 dx + \int_{-1}^1 2x \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} dx = 0 \quad (\text{beide Integranden sind ungerade})$$

$$\langle x^2, 1/\sqrt{2} \rangle = \int_{-1}^1 x^2/\sqrt{2} dx + \int_{-1}^1 0 dx = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

Und somit $\tilde{p}_3(x) = x^2 - 1/3$. Diesen gilt es noch zu normieren.

$$\begin{aligned} \|x^2 - 1/3\|^2 &= \int_{-1}^1 (x^2 - 1/3)^2 + 2x \cdot 2x dx = \int_{-1}^1 x^4 + (4 - 2/3)x^2 + 1/9 dx \\ &= \frac{2}{5} + \frac{20}{9} + \frac{2}{9} = \frac{128}{45} \\ \|x^2 - 1/3\| &= \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\text{Also } p_3(x) = \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}x^2 - \frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

bildet Koordinatenvektoren bzgl. der ONB auf solche bzgl. \mathcal{B} ab. Also ist die Inverse dieser Matrix gesucht. Wir rechnen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} & \bigg| & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & 0 & \bigg| & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} & \bigg| & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \bigg| & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & 0 & \bigg| & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} & \bigg| & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \bigg| & \sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \bigg| & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \bigg| & 0 & 0 & \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

c) Aus Aufgabenteil a) haben wir für $\text{span}\{1, x\}$ die ONB $\{1/\sqrt{2}, \sqrt{3}/(2\sqrt{2})x\}$. Die orthogonale Projektion von x^2 auf diesen Unterraum ist somit gleich

$$\langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} + \langle x^2, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x \rangle \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x.$$

Die auftretenden Skalarprodukte haben wir bereits in a) ausgerechnet und damit erhalten wir $q(x) = \frac{1}{3}$ als Projektion von x^2 .