

Lösungen zur Basisprüfung in Linearer Algebra I / II

Single Choice Aufgaben 1-20

Die Single Choice Aufgaben 1-20 bieten vier Aussagen an, von denen jeweils **genau eine** richtig ist. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie 1 Punkt, für jede inkorrekte oder nicht gegebene Antwort erhalten Sie 0 Punkte. **Kreuzen Sie deshalb in jedem Fall immer eine Antwort an.**

1. Welcher der folgenden Vektoren **ist** ein Eigenvektor der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung: Korrekt ist (b) und es ist

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

✓ (b) $\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die gegebene Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

hat die folgenden drei Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hiervon ist nur der Vektor v_2 in den Antwortmöglichkeiten als (b) gegeben.

2. Welche der folgenden Matrizen ist die Inverse von $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(c) \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Korrekt ist (c) und es ist

$$(a) \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\checkmark (c) \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5+0 & -2+2-0 & 1-1+0 \\ 12-15+3 & -4+6-1 & 2-3+1 \\ -6-0+6 & 2+0-2 & -1-0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_3$$

und da die Inverse eindeutig ist, folgt dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Gegeben sei der Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ durch

$$v := \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 37 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, e_3\}$, wobei

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Welche Darstellung besitzt dieser Vektor v bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\}$, wobei

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}?$$

(a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 37 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

Lösung: Korrekt ist (a) und es ist

✓ (a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 37 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

Es gilt

$$v = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 7b_1 + 3b_2 - b_3$$

und daher hat v bezüglich $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ die Koordinaten $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die

Antwortmöglichkeit (a) ist somit korrekt. Die anderen Antwortmöglichkeiten sind alle falsch, da nur eine Antwort korrekt sein kann.

4. Gegeben seien die vier Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 in \mathbb{R}^2 mit den Koordinaten

$$\begin{aligned}p_1 &= (1, 5), \\p_2 &= (3, 7), \\p_3 &= (-3, 9), \\p_4 &= (2, 6).\end{aligned}$$

Welches ist der **grösste** Abstand D , den zwei dieser Punkte voneinander aufweisen?

- (a) $D = 2\sqrt{10}$
- (b) $D = 4\sqrt{2}$
- (c) $D = \sqrt{34}$
- (d) $D = \sqrt{65}$

Lösung: Korrekt ist (a) und es ist

- ✓ (a) $D = 2\sqrt{10}$
- (b) $D = 4\sqrt{2}$
 - (c) $D = \sqrt{34}$
 - (d) $D = \sqrt{65}$

Die 10 Abstände zwischen den vier Punkten p_1, p_2, p_3, p_4 sind gegeben durch

$$\begin{aligned}d(p_1, p_1) &= 0, \quad d(p_2, p_2) = 0, \quad d(p_3, p_3) = 0, \quad d(p_4, p_4) = 0, \\d(p_1, p_2) &= d(p_2, p_1) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \\d(p_1, p_3) &= d(p_3, p_1) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}, \\d(p_1, p_4) &= d(p_4, p_1) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \\d(p_2, p_3) &= d(p_3, p_2) = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}, \\d(p_2, p_4) &= d(p_4, p_2) = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \\d(p_3, p_4) &= d(p_4, p_3) = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}.\end{aligned}$$

Der grösstmögliche Abstand D ist daher gegeben durch $D = 2\sqrt{10}$.

5. Welcher der folgenden Ausdrücke definiert ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum der reellen 2×2 -Matrizen?

- (a) $\langle A, B \rangle := \|A\| \cdot \|B\|$
- (b) $\langle A, B \rangle := AB$
- (c) $\langle A, B \rangle := \det(AB)$
- (d) $\langle A, B \rangle := \text{spur}(AB^T)$

Lösung: Korrekt ist (d) und es ist

- (a) $\langle A, B \rangle := \|A\| \cdot \|B\|$
- (b) $\langle A, B \rangle := AB$
- (c) $\langle A, B \rangle := \det(AB)$
- ✓ (d) $\langle A, B \rangle := \text{spur}(AB^T)$

Nur der Ausdruck $\langle A, B \rangle := \text{spur}(AB^T)$ erfüllt $\langle A, A \rangle = 0 \iff A = 0$ zusammen mit der Additionseigenschaft

$$\langle A, B + C \rangle = \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle$$

eines Skalarproduktes.

6. Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei reelle Matrizen und \mathbb{I}_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix. Welche der folgenden Antwortmöglichkeiten ist **falsch**?

- (a) Es gilt stets $\det(A^2 + 2A + \mathbb{I}_n) = (\det(A + \mathbb{I}_n))^2$.
- (b) Es gilt stets $\det(AB) = \det(BA)$.
- (c) Es gilt stets $\det(A^2 + 2AB + B^2) = (\det(A + B))^2$.
- (d) Es gilt stets $\det(A^2 + 2AB + 2BA + 4B^2) = (\det(A + 2B))^2$.

Lösung: Korrekt ist (c) und es ist

- (a) Es gilt stets $\det(A^2 + 2A + \mathbb{I}_n) = (\det(A + \mathbb{I}_n))^2$.
- (b) Es gilt stets $\det(AB) = \det(BA)$.
- ✓ (c) Es gilt stets $\det(A^2 + 2AB + B^2) = (\det(A + B))^2$.
- (d) Es gilt stets $\det(A^2 + 2AB + 2BA + 4B^2) = (\det(A + 2B))^2$.

Es gelten die folgenden Relationen:

- (a) $\det(A^2 + 2A + \mathbb{I}_n) = \det((A + \mathbb{I}_n)^2) = \det((A + \mathbb{I}_n) \cdot (A + \mathbb{I}_n))$
 $= \det(A + \mathbb{I}_n) \cdot \det(A + \mathbb{I}_n) = (\det(A + \mathbb{I}_n))^2,$
- (b) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(BA),$
- (c) $\det(A^2 + 2AB + B^2) \neq \det(A^2 + AB + BA + B^2) = \det((A + B)^2) = \det((A + B) \cdot (A + B))$
 $= \det(A + B) \cdot \det(A + B) = (\det(A + B))^2,$
- (d) $\det(A^2 + 2AB + 2BA + 4B^2) = \det((A + 2B)^2) = \det((A + 2B) \cdot (A + 2B))$
 $= \det(A + 2B) \cdot \det(A + 2B) = (\det(A + 2B))^2.$

Folglich ist (c) korrekt, da nur die Aussage in (c) falsch ist.

7. Welche der folgenden Abbildungen *f* **ist linear**?

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$
- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$
- (c) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto \mathbb{I}_2$ mit der 2×2 -Einheitsmatrix \mathbb{I}_2
- (d) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det(A)$

Lösung: Korrekt ist (a) und es ist

- ✓ (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$
- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$
- (c) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \mapsto \mathbb{I}_2$ mit der 2×2 -Einheitsmatrix \mathbb{I}_2
- (d) $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det(A)$

Es gilt

- (a) $0 = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$
- (b) $5 = f(2) = f(1 + 1) \neq f(1) + f(1) = 3 + 3 = 6,$
- (c) $\mathbb{I}_2 = f(A + B) \neq f(A) + f(B) = \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2 = 2\mathbb{I}_2,$
- (d) $4 = 2^2 \cdot \det(\mathbb{I}_2) = \det(2\mathbb{I}_2) = \det(\mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2) \neq \det(\mathbb{I}_2) + \det(\mathbb{I}_2) = 1 + 1 = 2.$

8. Gegeben seien die drei Punkte $A = (-1, 3, 5)$, $B = (2, -3, -4)$ und $C = (2, 1, -2)$ im euklidischen Raum \mathbb{R}^3 .

Welcher Punkt P ist die Orthogonalprojektion des Punktes C auf die Gerade g , welche durch die beiden Punkte A und B verläuft?

- (a) $P = (-2, 5, 8)$
- (b) $P = (0, 1, 2)$
- (c) $P = (1, -1, -1)$
- (d) $P = (3, -5, -7)$

Lösung: Korrekt ist (c) und es ist

- (a) $P = (-2, 5, 8)$
- (b) $P = (0, 1, 2)$
- ✓ (c) $P = (1, -1, -1)$
- (d) $P = (3, -5, -7)$

Die Gerade g durch $A = (-1, 3, 5)$ und $B = (2, -3, -4)$ wird beschrieben durch die Parameterdarstellung

$$g : \begin{pmatrix} x_\lambda \\ y_\lambda \\ z_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R},$$

da mit $\lambda = 0$ der Punkt A auf der Geraden g und mit $\lambda = 1$ der Punkte B auf der Geraden g beschrieben wird.

Es sei $P = (1, -1, -1)$. Dann gilt

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 - 12 + 9 = 0$$

und daher ist der Punkt $P = (1, -1, -1)$ die Orthogonalprojektion des Punktes $C = (2, 1, -2)$ auf die Gerade g durch A und B . Somit ist die Antwort (c) korrekt.

9. Welche Dimension hat der Vektorraum V bestehend aus allen Matrizen A der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \quad \text{und } \text{spur}(A) = 0?$$

- (a) $\dim(V) = 3$
- (b) $\dim(V) = 4$
- (c) $\dim(V) = 5$
- (d) $\dim(V) = 6$

Lösung: Korrekt ist (c) und es ist

- (a) $\dim(V) = 3$
- (b) $\dim(V) = 4$
- ✓ (c) $\dim(V) = 5$
- (d) $\dim(V) = 6$

Jede der sechs Variablen a, b, c, d, e und f repräsentiert eine mögliche Dimension und die Spurbedingung $\text{spur}(A) = a+d+f = 0$ setzt drei mögliche Dimensionskomponenten zueinander in Beziehung. Daher gilt stets, dass $f = -a - d$ und alle übrigen Variablen a, b, c, d und e sind frei wählbare Dimensionen. Daher ist $\dim(V) = 6 - 1 = 5$.

10. Welche der folgenden Mengen A, B, C, D ist **kein** Untervektorraum des Vektorraumes $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ bestehend aus allen 3×3 -Matrizen, ausgestattet mit der Matrixaddition und der skalaren Multiplikation?

- (a) $A := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \text{ und } a = d + e \right\}$
- (b) $B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ f & 0 & g \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R} \text{ und } a = d - e \right\}$
- (c) $C := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \text{ und } a = d + 1 \right\}$
- (d) $D := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R} \text{ und } a = 2d \right\}$

Lösung: Korrekt ist (c) und es ist

- (a) $A := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \text{ und } a = d + e \right\}$
- (b) $B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ f & 0 & g \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R} \text{ und } a = d - e \right\}$
- ✓ (c) $C := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & f \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \text{ und } a = d + 1 \right\}$

$$(d) \ D := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R} \text{ und } a = 2d \right\}$$

Die Abgeschlossenheit der Menge C unter skalarer Multiplikation ist äquivalent zu $\lambda a = \lambda d + 1$, aber es ist $\lambda a = \lambda(d + 1) = \lambda d + \lambda$, da $a = d + 1$ gilt. Daher ist die Menge C kein Untervektorraum. Alle anderen Mengen A , B und D sind dagegen Untervektorräume.

11. Welchen Rang hat die 4×4 -Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$?

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4

Lösung: Korrekt ist (c) und es ist

- (a) 1
- (b) 2
- ✓ (c) 3
- (d) 4

Die Treppennormalform der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und daher ist ihr Rang = 3.

12. Betrachten Sie den \mathbb{R} -Vektorraum $\mathcal{F} := F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} in der Variablen x mit der Addition

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall f, g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

und der skalaren Multiplikation

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \forall f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Darin enthalten ist der Untervektorraum

$$\mathcal{P}_3 := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 0, 1, 2, 3\}$$

der reellen Polynome mit Grad ≤ 3 in der Variablen x .

Welche der folgenden Aussagen ist **richtig**?

- (a) Die beiden Funktionen $\sin^2(x)$ und $\cos^2(x)$ sind linear abhängige Vektoren in \mathcal{F} .
- (b) Die beiden Polynome $p(x) = x^2 + 2x - 1$ und $q(x) = x(x^2 + 2x - 1)$ sind linear abhängige Vektoren in \mathcal{F} .
- (c) Es gilt $\text{span}\{5, 1 + x, 1 + x + x^2, x^3 + 2\} = \mathcal{P}_3$.
- (d) Die Dimension des Untervektorraumes \mathcal{P}_3 ist 3.

Lösung: Korrekt ist (c) und es ist

- (a) Die beiden Funktionen $\sin^2(x)$ und $\cos^2(x)$ sind linear abhängige Vektoren in \mathcal{F} .
- (b) Die beiden Polynome $p(x) = x^2 + 2x - 1$ und $q(x) = x(x^2 + 2x - 1)$ sind linear abhängige Vektoren in \mathcal{F} .
- ✓ (c) Es gilt $\text{span}\{5, 1 + x, 1 + x + x^2, x^3 + 2\} = \mathcal{P}_3$.
- (d) Die Dimension des Untervektorraumes \mathcal{P}_3 ist 3.

Dies gilt, da

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{5} \cdot (5), \\ x &= (1 + x) - \frac{1}{5} \cdot (5), \\ x^2 &= (1 + x + x^2) - (1 + x), \\ x^3 &= (x^3 + 2) - 2 \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot (5)\right) \end{aligned}$$

und weil die Menge $\{1, x, x^2, x^3\}$ den Untervektorraum \mathcal{P}_3 aufspannt.

13. Für welchen reellen Parameter $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 1 \\ (a + 1)x - 2z &= 2 \\ x + (2 - 2a)y &= 3 \end{aligned}$$

nur den Punkt $(x, y, z) = (3, -8, 2)$ als Lösung?

- (a) $a = 1$
- (b) $a = 3$
- (c) $a = 5$
- (d) $a = 7$

Lösung: Korrekt ist (a) und es ist

- ✓ (a) $a = 1$
- (b) $a = 3$
 - (c) $a = 5$
 - (d) $a = 7$

Das Gleichungssystem in der Matrixschreibweise ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ a+1 & 0 & -2 \\ 1 & 2-2a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ a+1 & 0 & -2 \\ 1 & 2-2a & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8-4a-6a^2} \begin{pmatrix} 4-4a & 6-6a & -2 \\ -2 & -3 & 3a+5 \\ 2-2a^2 & 2a-1 & -a-1 \end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir, dass die Lösung des gegebenen Gleichungssystems eindeutig ist. Nun ist der Vektor $(x, y, z) = (3, -8, 2)$ mit $a = 1$ eine Lösung des obigen Gleichungssystems, da

$$\begin{aligned} 3 + (-8) + 3 \cdot 2 &= 1 \\ (1+1) \cdot 3 - 2 \cdot 2 &= 2 \\ 3 + (2-2 \cdot 1) \cdot (-8) &= 3 \end{aligned}$$

und damit auch die einzige für $a = 1$.

Alle anderen Werte $a = 3$, $a = 5$ und $a = 7$ ergeben keine Lösungen.

14. Welchen Wert hat der Ausdruck

$$\text{spur} \left[\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & x \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 3 \ -2) + \begin{pmatrix} -x & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \right] ?$$

- (a) $x + 1$

- (b) $2x + 3$
- (c) 25
- (d) 31

Lösung: Korrekt ist (d) und es ist

- (a) $x + 1$.
- (b) $2x + 3$.
- (c) 25.
- ✓ (d) 31.

Es gilt

$$\begin{aligned}
 & \text{spur} \left[\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & x \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 3 \ -2) + \begin{pmatrix} -x & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \text{spur} \left[\begin{pmatrix} x+2 & 4x+1 & x^2-2 \\ 17 & 29 & 3x+1 \\ -4 & -8 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 3 \ -2) + \begin{pmatrix} -x & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \text{spur} \left[\begin{pmatrix} x+2 & 4x+1 & x^2-2 \\ 17 & 29 & 3x+1 \\ -4 & -8 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 9 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \text{spur} \left[\begin{pmatrix} x+2 & 4x+1 & x^2-2 \\ 17 & 29 & 3x+1 \\ -4 & -8 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & 5 & -1 \\ -1 & 7 & -3 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \text{spur} \left[\begin{pmatrix} 2 & 4x+6 & x^2-3 \\ 16 & 36 & 3x-2 \\ -2 & -2 & -7 \end{pmatrix} \right] \\
 &= 31.
 \end{aligned}$$

Folglich ist die Antwort (d) korrekt.

15. Wie lautet das charakteristische Polynom der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

- (a) $-x^3 + 7x - 6$
- (b) $-x^3 + 2x^2 + 5x + 1$
- (c) $-x^3 + 3x^2 - 3x + 6$

(d) $-x^3 + 4$

Lösung: Korrekt ist (a) und es ist

✓ (a) $-x^3 + 7x - 6$

(b) $-x^3 + 2x^2 + 5x + 1$

(c) $-x^3 + 3x^2 - 3x + 6$

(d) $-x^3 + 4$

Wir lesen aus der Matrix ab, dass die Determinante der Matrix gleich $1 \cdot (-2) \cdot 3 = -6$ ist. Daher kann das charakteristische Polynom nur $-x^3 + 7x - 6$ lauten, da die Determinante von -6 der konstante Term ist.

16. Welche der folgenden Matrizen ist **nicht** orthogonal?

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Lösung: Korrekt ist (d) und es ist

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\checkmark \text{ (d) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dies gilt, da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{9}{25} + 0 + \frac{16}{25} & 0 + 0 + 0 & -\frac{12}{25} + 0 + \frac{12}{25} \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 1 + 0 & 0 + 0 + 0 \\ -\frac{12}{25} + 0 + \frac{12}{25} & 0 + 0 + 0 & \frac{16}{25} + 0 + \frac{9}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

17. Sei die Matrix M gegeben durch $M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Mengen A , B , C , D **ist** eine Basis von $\ker(M)$?

(a) $A := \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -19 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$(c) \ C := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(d) \ D := \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -17 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Lösung: Korrekt ist (d) und es ist

$$(a) \ A := \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -19 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(b) \ B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(c) \ C := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\checkmark (d) \ D := \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -17 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Die Dimension des Bildes $\text{Im}(M)$ ist 3 und die Dimension des Kerns $\ker(M)$ ist 2. Dies

gilt, da die drei linear unabhängigen Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im Bild $\text{Im}(M)$ liegen und die beiden linear unabhängigen Vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ -17 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ und

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Kern $\ker(M)$ liegen, da

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -17 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 34 + 15 + 0 + 21 \\ 0 - 17 + 3 + 0 + 14 \\ -4 - 34 + 3 + 0 + 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 + 0 + 1 + 0 \\ 0 - 1 + 0 + 1 + 0 \\ 2 - 2 + 0 + 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist die Menge

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -17 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\ker(M)$ und die Antwortmöglichkeit (d) somit korrekt. Alle anderen Mengen A , B , C sind keine Basen von $\ker(M)$.

18. Welcher der folgenden Vektoren liegt **nicht** im Bild der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung: Korrekt ist (c) und es ist

(a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

✓ (c) $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ aus (a), (b) und (d) sind im Bild der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \text{ da gilt}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ aus (c) ist nicht im Bild von $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, da nur Vektoren von der Form $\begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \end{pmatrix}$ in diesem Bild liegen können, da die dritte Zeile der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ gleich der Summe der ersten beiden Zeilen ist}$$

$$(2 \quad -3 \quad -5) + (4 \quad 7 \quad 1) = (6 \quad 4 \quad -4).$$

19. Welchen Wert hat die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4

Lösung: Korrekt ist (b) und es ist

- (a) 1

✓ (b) 2

(c) 3

(d) 4

Es gilt mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz, dass

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= (-1)^{4+4} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 0 \\ &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 0 \\ &= 4 - 2 \\ &= 2.\end{aligned}$$

20. Welche der folgenden Mengen A , B , C , D von Vektoren ist **keine** Basis von \mathbb{R}^3 ?

(a) $A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $C := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $D := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Lösung: Korrekt ist (d) und es ist

(a) $A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$(c) \ C := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\checkmark (d) \ D := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Es gilt die lineare Abhängigkeitsrelation

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und folglich ist die Menge D keine Basis von \mathbb{R}^3 . Da nur eine Antwort korrekt ist, ist die Menge D die einzige Menge von Vektoren, welche keine Basis von \mathbb{R}^3 bildet. Zudem gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -8 \neq 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

was zeigt, dass die Mengen A , B und C auch wirklich Basen von \mathbb{R}^3 sind.

Handaufgaben 21, 22 und 23

Die folgenden drei Handaufgaben 21, 22 und 23 sollen mit einem sauberen Lösungsweg dokumentiert werden. Diese drei Aufgaben ergeben bei korrekter Lösung je 10 Punkte.

21. (10 Punkte)

(a) **(2 Punkte)** Berechnen Sie die Zeilenstufenform der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) **(2 Punkte)** Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) **(3 Punkte)** Finden Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) **(3 Punkte)** Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclcl} x & + & 2y & + & 4z & = & 5 \\ 3x & + & y & + & 4z & = & 5 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 1. \end{array}$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[4.Z+2 \times (1.Z)]{2.Z-1.Z, 3.Z-1.Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[4.Z+2.Z]{3.Z+2.Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{3.Z \leftrightarrow 4.Z} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Wir haben damit die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

von A .

(b) Es ist

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda \mathbb{I}_3) \\ &= \det \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= 9\lambda - \lambda^3 \\ &= \lambda(9 - \lambda^2) \\ &= \lambda(3 - \lambda)(3 + \lambda) \end{aligned}$$

das charakteristische Polynom von B und daher sind die drei Eigenwerte von B gegeben durch $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 3$.

(c) Wir berechnen

$$\begin{array}{c} \underline{+2} \\ \underline{-1} \end{array} \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 2.Z=2.Z-\underline{2} \times (1.Z) \\ 3.Z=3.Z+\underline{1} \times (1.Z) \end{array} \begin{array}{c} \underline{+0} \end{array} \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 3.Z=3.Z-\underline{0} \times (2.Z) \end{array} \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline \end{array} (*).$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{aus den fettgedruckten Manipulationen})$$

und

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{aus } (*)).$$

(d) Gegeben ist

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 4z & = & 5 \\ 3x & + & y & + & 4z & = & 5 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 1. \end{array}$$

Es gilt

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 4z & = & 5 \\ 3x & + & y & + & 4z & = & 5 \\ & & & & -z & = & -4 \end{array}$$

und es folgt, dass $z = 4$ ist.
Nun folgt, dass

$$\begin{array}{rcccccl} x & + & 2y & + & 16 & = & 5 \\ 3x & + & y & + & 16 & = & 5, \end{array}$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{array}{rcccccl} x & + & 2y & = & -11 \\ 3x & + & y & = & -11 \end{array}$$

und es ergibt sich daraus

$$\begin{array}{rcccccl} x & + & 2y & = & -11 \\ & & -5y & = & 22. \end{array}$$

Es folgt dass $y = -\frac{22}{5}$ und daraus ergibt sich sofort auch $x = -\frac{11}{5}$.
Daraus ergibt sich

$$(x, y, z) = \left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 4 \right).$$

22. (10 Punkte)

(a) **(3 Punkte)** Gegeben sei der Vektorraum \mathbb{R}^3 mit der Standardbasis

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Durch die Wahl der neuen Basis

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix T von \mathcal{B} nach \mathcal{C} .

(b) **(2 Punkte)** Gegeben sei wiederum der Vektorraum \mathbb{R}^3 mit der Standardbasis \mathcal{B} .
Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von \mathbb{R}^3 nach \mathbb{R}^3 bezüglich der Standardbasis \mathcal{B} . Durch die Wahl einer neuen Basis \mathcal{D} werden neue Koordinaten eingeführt. Die Übergangsmatrix M von \mathcal{B} nach \mathcal{D} sei

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch welche Matrix B wird die lineare Abbildung A bezüglich der neuen Koordinaten, welche zur Basis \mathcal{D} gehören, beschrieben?

- (c) **(3 Punkte)** Es sei \mathcal{P}_3 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 . Gegeben sei die folgende lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{P}_3 &\rightarrow \mathcal{P}_3 \\ p(x) &\mapsto 2p''(x) + 3xp'(x). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix D von \mathcal{F} bezüglich der Standardbasis \mathcal{E} von \mathcal{P}_3 , wobei

$$\mathcal{E} := \{1, x, x^2, x^3\}.$$

- (d) **(2 Punkte)** Es sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 und

$$\mathcal{A} := \{a_1(x) := -1, a_2(x) := x + 1, a_3(x) := x^2 + x + 1\}.$$

Schreiben Sie das Polynom $p(x) := 2x^2 + x - 2$ in den Koordinaten der Basis \mathcal{A} .

Lösung:

- (a) Die Übergangsmatrix von \mathcal{C} nach \mathcal{B} ist gegeben durch

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$T = S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

für die Übergangsmatrix von \mathcal{B} nach \mathcal{C} .

(b) Es gilt

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit berechnen wir

$$B = MAM^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Es gilt mit $\mathcal{F}(p(x)) = 2p''(x) + 3xp'(x)$, dass

$$\mathcal{F}(1) = 2 \cdot 1'' + 3x \cdot 1' = 0,$$

$$\mathcal{F}(x) = 2x'' + 3x \cdot x' = 3x,$$

$$\mathcal{F}(x^2) = 2(x^2)'' + 3x(x^2)' = 4 + 6x^2,$$

$$\mathcal{F}(x^3) = 2(x^3)'' + 3x(x^3)' = 12x + 9x^3.$$

Daher ist

$$D = [\mathcal{F}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

(d) Es gilt

$$p(x) = 2x^2 + x - 2 = 3 \cdot (-1) - (x + 1) + 2(x^2 + x + 1).$$

Daher hat das Polynom $p(x) = 2x^2 + x - 2$ die Koordinaten $(3, -1, 2)$ bezüglich der obigen Basis \mathcal{A} .

23. (10 Punkte)

(a) (**2 Punkte**) Es sei \mathcal{P}_2 der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 und \mathcal{F} die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{P}_2 &\rightarrow \mathcal{P}_2 \\ p(x) &\mapsto xp'(x). \end{aligned}$$

Finden Sie dasjenige Polynom $p(x) \in \mathcal{P}_2$, für welches folgendes gilt:

$$\mathcal{F}(p(x)) = p(x) \quad \text{und} \quad p(1) = 3.$$

- (b) **(4 Punkte)** Es seien $C([0, 1])$ und $C^1([0, 1])$ die Vektorräume der stetigen Funktionen und der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0, 1]$. Gegeben sei zudem die lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\mathcal{T} : C^1([0, 1]) &\rightarrow C([0, 1]) \\ f(x) &\mapsto f'(x).\end{aligned}$$

Bestimmen Sie denjenigen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ und die dazugehörige Eigenfunktion $\phi_\lambda(x) \in C^1([0, 1])$ der linearen Abbildung \mathcal{T} (d.h. $\mathcal{T}(\phi_\lambda(x)) = \lambda\phi_\lambda(x)$), sodass $\phi_\lambda(0) = 1$ und $\phi_\lambda(1) = 2$ gilt.

- (c) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\dot{y} = Ay,$$

wobei die Matrix A gegeben ist durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

- (a) Es sei $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}$ das gesuchte Polynom. Dann gilt

$$\mathcal{F}(p(x)) = xp'(x) = x(2ax + b) = 2ax^2 + bx = ax^2 + bx + c = p(x)$$

und

$$p(1) = a + b + c = 3.$$

Daraus folgt, dass $a = 0$, $b = 3$ und $c = 0$.

Damit ist das gesuchte Polynom $p(x) = 3x$.

- (b) Die Gleichung

$$\mathcal{T}(\phi_\lambda(x)) = \phi'_\lambda(x) = \lambda\phi_\lambda(x)$$

hat die Eigenfunktionen

$$\phi_\lambda(x) = Ce^{\lambda x} \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nun muss gelten

$$\phi_\lambda(0) = Ce^0 = C = 1,$$

$$\phi_\lambda(1) = Ce^\lambda = e^\lambda = 2 \iff \lambda = \ln(2) \implies \phi_\lambda(x) = e^{\ln(2)x} = 2^x.$$

(c) Die Eigenvektoren der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch

$$\begin{aligned} v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ v_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ v_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und ihre Eigenwerte sind $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 2$.

Mit der Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$D := T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nach der Transformation $y(t) = Tx(t)$ ist das Differentialgleichungssystem durch $\dot{x}(t) = Dx(t)$, also

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -2x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= 0, \\ \dot{x}_3(t) &= 2x_3(t) \end{aligned}$$

gegeben. Das transformierte System hat die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{-2t}, \\ x_2(t) &= c_2, \\ x_3(t) &= c_3 e^{2t}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des ursprünglichen Systems ist also durch

$$\begin{aligned} y(t) &= Tx(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_2 \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} - c_2 + c_3 e^{2t} \\ -c_1 e^{-2t} + c_3 e^{2t} \\ c_1 e^{-2t} + c_2 + c_3 e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

gegeben.